INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN VASLUI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 19.02.2017
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A^2 = 5A$.

b) Să se demonstreze că $A^n = 5^{n-1} \cdot A, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$.

c) Să se arate că matricea $A - A^2 + A^3 - \cdots + (-1)^{99} \cdot A^{100}$ are toate elementele strict negative.

Soluție

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$=5A (2p)

b) metoda inducției matematice (3p)

c) $A - A^2 + A^3 - \cdots + (-1)^{99} \cdot A^{100} = A - 5A + 5^2A - \cdots - 5^{99}A =$

$(1 - 5 + 5^2 - \cdots - 5^{99})\, A \ \underset{(1p)}{=} \ 1 \cdot \frac{(-5)^{100}-1}{-5-1} \cdot A = -\frac{5^{100}-1}{6} \ A \Longrightarrow$ Concluzie (1p)

2. a) Sa se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2017x}{2016x+1}$.

b) Sa se determine valorile reale ale lui a pentru care $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x-2017} = 2017-a$

c) Sa se determine valorile reale ale parametrilor a ,b pentru care $\lim\limits_{x\to1} \frac{2017^x-a}{\ln x} = b$

Soluție

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2017x}{2016x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2017x}{2016x+1} =$ 1p

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2017)}{x(2016+\frac{1}{x})} = 1$ 1p

b) $\sqrt{a-2017} = 2017-a$

conditiile $a-2017 \geq 0$ si $2017-a \geq 0$ $\rightarrow$a=2017 1p

verifica a=2017 este solutie 1p

c)Daca a$\neq$2017 atunci $(\nexists)$ $\lim\limits_{x\to1} \frac{2017^x-a}{\ln x}$ nu convine 1p

Daca a=2017 atunci $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2017^x-a}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2017^x-2017}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2017(2017^{x-1}-1)}{\ln(1+x-1)}=$

(1p) $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2017(2017^{x-1}-1)}{x-1}\dfrac{x-1}{\ln(1+(x-1))}=2017\ln 2017$, b= 2017ln2017 1p

3. Fie A= $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Calculând în două moduri determinantul matricei A, sa se demonstreze egalitatea:

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

b) Dacă $a+b+c\geq 0$, să se demonstreze ca $detA\geq 0$.

Soluție

a) (*) detA=$a^3+b^3+c^3-3abc$ (1p)

(**) detA=(a+b+c)$\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ =$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ (2p)

Din (*), (**) rezulta egalitatea (1p)

b) $(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=\frac{1}{2}(2a^2+2c^2+2b^2-2ab-2bc-ca)$

$\left.\begin{matrix}=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geq 0 \text{ (2p)} \\ a+b+c\geq 0\end{matrix}\right\}\Longrightarrow$ detA≥ 0 (1p)

4. Se considera $L_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{(2x)^2+1}\cdot\sqrt[3]{(3x)^2+1}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{(nx)^2+1}}{x^2}$ $,n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

a) Să se calculeze L_2 și L_3.

b) Să se calculeze L_n, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

Soluție

a) $L_2=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{(2x)^2+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-4x^2-1}{x^2(1+\sqrt{(2x)^2+1})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-4x^2}{x^2(1+\sqrt{(2x)^2+1})}=\frac{-4}{2}=-2$

(2p)

$L_3=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{(2x)^2+1}\cdot\sqrt[3]{(3x)^2+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{(3x)^2+1}+\sqrt[3]{(3x)^2+1}-\sqrt{(2x)^2+1}\cdot\sqrt[3]{(3x)^2+1}}{x^2}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{(3x)^2+1}}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(3x)^2+1}\cdot(1-\sqrt{(2x)^2+1})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(3x)^2-1}{x^2(1+\sqrt[3]{(3x)^2+1}+\sqrt[3]{[(3x)^2+1]^2})}+$

$L_2=-3-2=-5$ (2p)

b) $L_n = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\sqrt[n]{(nx)^2+1}+\sqrt[n]{(nx)^2+1}-\sqrt{(2x)^2+1}\cdot\sqrt[3]{(3x)^2+1}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{(nx)^2+1}}{x^2} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\sqrt[n]{(nx)^2+1}}{x^2} + \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[n]{(nx)^2+1} \cdot \frac{1-\sqrt{(2x)^2+1}\cdot\sqrt[3]{(3x)^2+1}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n-1]{[(n-1)x]^2+1}}{x^2} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-(nx)^2-1}{x^2(1+\sqrt[n]{(nx)^2+1}+\cdots+\sqrt[n]{[(nx)^2+1]^{n-1}})} + L_{n-1} \underset{(1p)}{\Longrightarrow}$

$L_n = -n + L_{n-1}$, $n \geq 3$. $\underset{(1p)}{\Longrightarrow} L_n = 1 - \frac{n(n+1)}{n}, n \geq 2$ (1p)